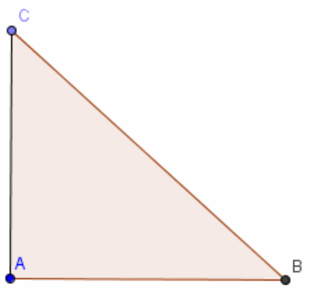
Lösungsvorschläge zur Übungsarbeit Trigonometrie:

Aufgabe 1: Berechne jeweils in dem Dreieck ABC fehlende Seitenlängen und Winkel und den Flächeninhalt.

a = 12 cm, b = 8 cm, α = 90°
b = 70 m, α = 23°, β = 90°

Hier gilt es zunächst zu erkennen, dass es sich jeweils um rechtwinklige Dreiecke handelt. Es empfiehlt sich jeweils eine Skizze, die erkennen lässt, wo der rechte Winkel ist. Für Aufgabe a) folgt:



Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck 2 der 3 Seiten bekannt sind, kann mit dem Satz des Pythagoras den dritten Winkel ermitteln. Achtung: Es gilt zu beachten, welche Seite die Hypotenuse ist – in diesem Fall Seite a.
Es folgt:

$$12^2 = 8^2 + c^2 \quad \left| -8^2 \right.$$
$$12^2 - 8^2 = c^2 \quad \left| \sqrt{} \right.$$
$$\sqrt{12^2 - 8^2} = c$$
$$c \approx 8{,}94$$

Die Winkel β und γ kann ich nun über Winkelfunktionen herausbekommen.

Es gilt etwa für β:

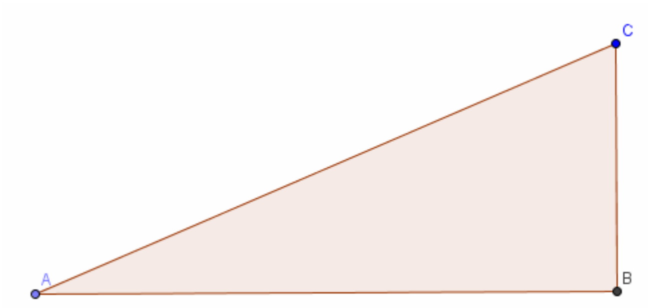
$$\sin\beta = \frac{8}{12} \quad \left| \arcsin \right.$$
$$\beta = \arcsin\left(\frac{8}{12}\right)^{\circ}$$
$$\beta \approx 41{,}81^{\circ}$$

Den letzten fehlenden Winkel γ bekomme ich mit der Kenntnis über die Innenwinkelsumme im Dreieck von 180° heraus. Es gilt: 180° – 90° – 41,81° = 48,19°

Für Teilaufgabe a gilt also: c ≈ 8,94 cm, b ≈ 41,81° und γ ≈ 48,19°.

Teilaufgabe b)

Ich beginne auch hier mit einer Skizze des Sachverhalts. In diesem Fall ist β 90° groß.



Es sind zwei Winkel gegeben. Mit der feststehenden Innenwinkelsumme ermittle ich den dritten Winkel und erhalte für $\gamma = 67°$

Nun gilt es, eine der fehlenden Seiten herauszubekommen. Die Entscheidung ist mir genauso überlassen wie die Wahl der passenden Winkelfunktion.

Der Abwechslung zuliebe wähle ich als Winkelfunktion Kosinus und ermittle die Länge der Seite c. Hierbei gilt es einen kühlen Kopf zu behalten: Es ist genau abzuwägen: Wenn ich die Kosinusfunktion benutze und c heraus bekommen will, was ist dann die Ankathete? Was die Hypotenuse? Auf welchen Winkel muss ich mich beziehen? In diesem Falle gilt:

$$\cos 23° = \frac{c}{70} \quad \Big| \cdot 70$$
$$\cos 23° \cdot 70 = c$$
$$c \approx 64{,}44$$

Die dritte Seite kann ich nun wieder mit Hilfe des Satzes von Pythagoras herausbekommen. Auch hier ist zu beachten, dass nicht etwa c, sondern b die Hypotenuse ist:

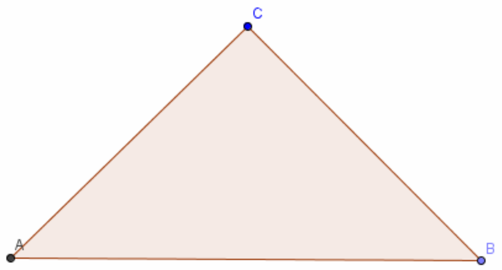
$$70^2 = a^2 + 64{,}44^2 \quad \Big| - 64{,}44^2$$
$$70^2 - 64{,}44^2 = a^2 \quad \Big| \sqrt{}$$
$$\sqrt{70^2 - 64{,}44^2} = a$$
$$a \approx 27{,}34$$

Somit sind alle fehlenden Werte ermittelt: $\gamma = 67°$, $a \approx 27{,}34$ m und $c \approx 64{,}44$ m.

Aufgabe 2)
Ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck hat einen Flächeninhalt von 50 cm².

a) Wie lang sind die beiden Katheten?
b) Wie lang ist die Basisseite?

Skizze:



Größte Schwierigkeit bei Aufgabe 2: Man muss lesen können! Wer diese Hürde zu nehmen weiß, hat es eigentlich schon geschafft:

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck, von dem der Flächeninhalt bekannt ist. Bei einem rechtwinkligen Dreieck wissen wir: $\text{Flächeninhalt} = \frac{\text{Kathete a} \cdot \text{Kathete b}}{2}$.

Es folgt: $50 = \frac{a \cdot b}{2}$. Allerdings funktioniert diese Aufgabe nicht: Eine Gleichung aber zwei Unbekannte ist nicht eindeutig lösbar. Es gibt aber noch eine zweite Information in der Aufgabenstellung, die uns zur Lösung führt: Das Dreieck ist nicht nur rechtwinklig, sondern auch noch gleichschenklig. Folglich wissen wir, dass die Katheten gleich lang sind und wir können schreiben: $50 = \frac{a \cdot a}{2}$.

Der Rest ist Auflösen nach a:

$$50 = \frac{a^2}{2} \quad | \cdot 2$$

$$100 = a^2 \quad | \sqrt{}$$

$$a = 10$$

Antwort für a: Die Katheten sind jeweils 10 cm lang.

Für Aufgabe b können wir uns, da es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt, wieder den Satz des Pythagoras zu Nutze machen. Es gilt mit c als Basisseite:

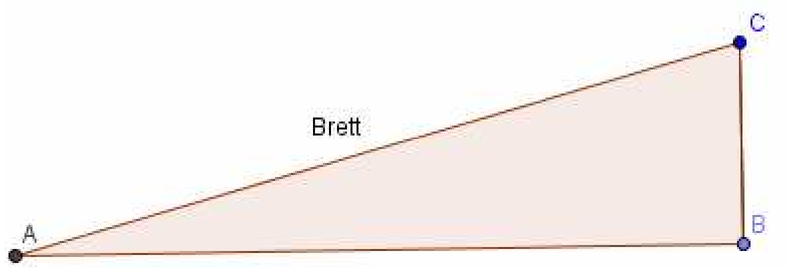
$c^2 = 2\ a^2$
$c^2 = 200$
$c \approx 14{,}14$ cm

Antwort für b: Die Basisseite hat eine Länge von 14,14 cm.

Aufgabe 3)
Auf einer Baustelle wird anstatt einer noch nicht vorhandenen Treppe ein Brett genommen. Es hat zwischen seinen Auflagepunkten auf dem Boden und beim Hauseingang eine Länge von 1,5 m und überwindet dabei eine Höhe von 40 cm.

a) Wie groß ist der Steigungswinkel?
b) Berechne den Abstand zwischen den Auflagepunkten des Brettes.
c) Berechne die Steigung in Prozent!

Skizze:



Wie die Skizze deutlich macht, handelt es sich hierbei um ein rechtwinkliges Dreieck. Der Steigungswinkel lässt sich entsprechend mit einer Winkelfunktion darstellen. Gegeben sind die Hypotenuse des Dreiecks (150 cm) und eine der Katheten. Für den gesuchten Winkel α ist also die Sinusfunktion zu verwenden:

$$\sin\alpha = \frac{40}{150} \quad |\arcsin$$
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{40}{150}\right)^{\circ}$$
$$\alpha \approx 15{,}47^{\circ}$$

Antwort a: Der Steigungswinkel des Brettes beträgt 15,47°.

Zu b) Wenn nach einem Abstand gefragt ist, dann meint dass in solchen Fällen die kürzeste Verbindung der Punkte von oben ausgesehen. Es ist also nicht nach der Länge des Brettes gesucht – die ist ja auch gegeben – sondern nach der fehlenden Kathete. Diese ist mit dem Satz des Pythagoras einfach zu ermitteln:

$$150^2 = 40^2 + c^2 \quad |-40^2$$
$$150^2 - 40^2 = c^2 \quad |\sqrt{\ }$$
$$\sqrt{150^2 - 40^2} = c$$
$$c \approx 144{,}57$$

Antwort b: Der Abstand zwischen den Auflagepunkten beträgt 144,57 cm.

Zu c) Die Steigung in Prozent ist kein großes Mysterium: Es beschreibt das Verhältnis in Prozent von Abstand zwischen zwei Punkten und der dabei überwundenen Höhe. Zur Einführung ein kurzes Beispiel: Seien auf einer Ebene zwei Punkte A und B gegeben. Wenn man von A nach B fährt, dann entspricht die Entfernung zwischen den Punkten dem Abstand, die Steigung in Prozent ist 0. Nehmen wir nun aber an, dass der Punkt B senkrecht nach oben gehoben wird. Der Abstand bleibt gleich: von oben betrachtet, wie es auf einer Karte der Fall wäre, hat der Punkt B seine Position nicht geändert. Von der Seite sieht man aber, dass er höher gekommen ist. Will man nun von Punkt A zu Punkt B gelangen, muss man nicht nur den Abstand überwinden, sondern auch noch den Höhenunterschied. Die Entfernung wird also größer.
Will man nun die Steiung in Prozent wissen, nimmt man das Verhältnis von $\frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{Abs tan d}} \cdot 100$.

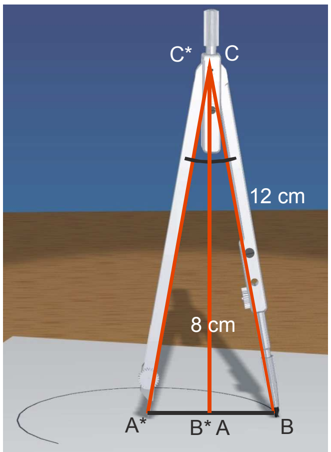
In unserem Fall beträgt der Abstand 144,57 cm. Der Höhenunterschied beträgt 40 cm.

Für die Steigung in Prozent folgt: $\frac{40}{144{,}57} \cdot 100 \approx 27{,}67\%$.

Antwort c: Die Steigung des Brettes in Prozent beträgt 27,67 %.

Aufgabe 4: Henrike hat einen neuen Zirkel geschenkt bekommen. Seine Schenkel haben eine Länge von 12 cm. Wenn sie ihn ganz aufklappt und mit beiden Schenkeln senkrecht aufs Papier stellt, so ist der Scheitelpunkt des Zirkels 8 cm vom Papier entfernt.
a) Welchen Winkel bilden die beiden Schenkel des Zirkels?
b) Wie groß ist der Radius des Kreises, der mit dieser Einstellung des Zirkels erzeugt werden kann?

Zunächst zur Aufgabenstellung: Die Formulierung ist bewusst zweideutig gemeint: Was heißt denn „senkrecht aufs Papier“? Solche kleinen Fallen werden gerne eingebaut – sie können erst umgangen werden, wenn man sich die Aufgabe gut und gründlich vorgestellt hat. Und das ist meistens einfacher, als man denkt: Da ist ein Mädchen – der Name tut nix zur Sache. Sie hat einen Zirkel. Und den stellt sie hin – so, dass beide Schenkel das Papier berühren – heißt: Ganz normal, wie man seinen Zirkel eben aufs Papier stellt. Er ist ganz aufgeklappt – okay, das kann man sich doch noch vorstellen, oder? Offenbar lässt er sich nicht soweit aufklappen, dass die Schenkel einen 180°-Winkel bilden. Das ist bei ganz vielen Zirkeln mit Feststellschraube der Fall.



Nun soll der Scheitelpunkt des Zirkels 8 cm vom Papier entfernt sein. Häää? Nun ja: Auch hier ist es wieder wichtig, das Bild von Henrike mit dem Zirkel in der Hand vor Augen zu haben: Er steht auf dem Papier, als wolle sie gleich einen Kreis zeichnen. Der Scheitelpunkt ist der Punkt, in dem die beiden Schenkel vom Zirkel – also der Schenkel mit der Spitze unten dran und der mit der Bleistiftmine unten dran – zusammenlaufen. Damit das ganze auch klappt von der Vorstellung, ist eine Skizze ganz wichtig:

Wer nun einen geschulten Blick hat, erkennt sofort die beiden rechtwinkligen Dreiecke (A*, B*, C* und A, B, C), die sich durch die Höhe und Schenkel des Zirkels ergeben.
Für die Aufgaben muss jeweils nur eines der Dreiecke betrachtet werden.
Zu a) Gesucht ist der Winkel an der Spitze des Zirkels. Nimmt man ein Teildreieck, so kann man genau die Hälfte dieses Winkels berechnen.

$$\cos\gamma = \frac{8}{12} \quad |\arccos$$

Es folgt: $\gamma = \arccos\left(\frac{8}{12}\right)$

$$\gamma \approx 48{,}19°$$

Für den gesuchten Winkel muss das Teilergebnis verdoppelt werden, so dass als Antwort formuliert werden kann:
Henrike kann ihren Zirkel bis zu einem Winkel von 96,38° öffnen.

Zu b) In der Frage hätte es korrekt heißen müssen: Wie groß ist der Radius des Kreises, der mit dieser Einstellung des Zirkels erzeugt werden kann? – Aber ich glaube, dass tut nicht viel zur Sache.

Hier muss nun die fehlende Kathete mit dem Satz des Pythagoras ausgerechnet werden:

$$
\begin{aligned}
12^2 &= 8^2 + c^2 && \left| -8^2 \right. \\
12^2 - 8^2 &= c^2 && \left| \sqrt{} \right. \\
\sqrt{12^2 - 8^2} &= c \\
c &\approx 8{,}94
\end{aligned}
$$

.

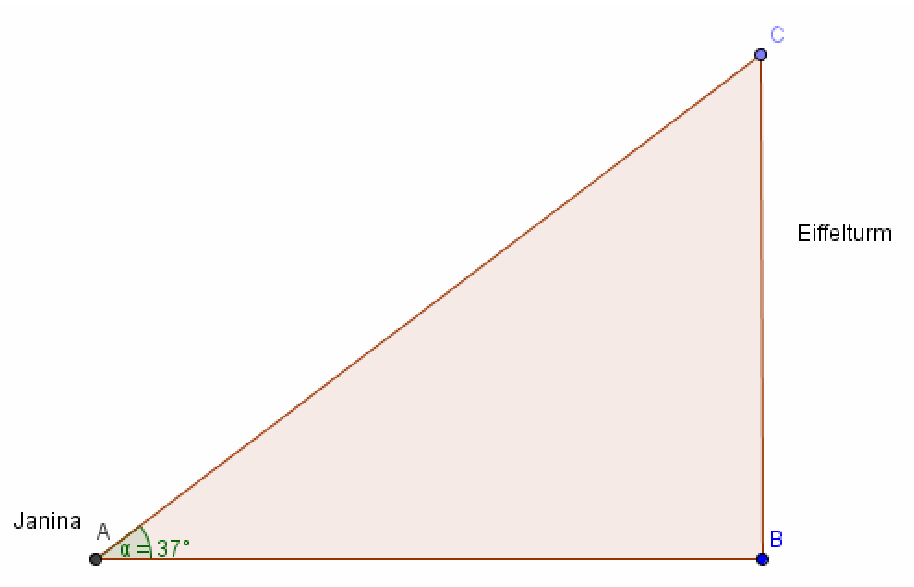
Auch in diesem Falle muss das Ergebnis zunächst verdoppelt werden, um Antwort auf die eigentliche Frage geben zu können:

Henrike kann mit ihrem Zirkel Kreise mit einem Radius von 17,88 cm zeichnen.

Aufgabe 5:
Janina ist zum ersten Mal in Paris und hat glücklicherweise ihr Geodreieck dabei. Sie weiß, dass sie von ihrem Standpunkt aus die Spitze des 327 m hohen Turmes unter einem Winkel von 37° sieht.
Wie weit ist sie (Luftlinie) von dem Turm entfernt?

Ja, ja... die Janina, dass ist doch mal ein Mädchen, wie es mir gefällt: Nie ohne Geodreieck unterwegs! Man hätte natürlich noch erwähnen können, dass es sich um den Eiffelturm handelt – aber das habt ihr euch bestimmt schon gedacht…
Mit dieser Methode hat man früher in der Tat Entfernungen bestimmt, aber häufiger noch die Höhen… aber damit will ich euch jetzt mal nicht langweilen…

Zunächst: Die Skizze!



Gesucht ist also die Seitenlänge c. Gegeben ist der Winkel α und die Seite a.
Da sowohl Seite c als auch Seite a Katheten sind, ist die Tangensfunktion das Mittel zum Zweck:

$$\tan 37° = \frac{327}{c} \quad \left| \cdot c \right.$$

$$\tan 37° \cdot c = 327 \quad \left| : \tan 37° \right.$$

$$c = \frac{327}{\tan 37°}$$

$$c \approx 433{,}94$$

Janina ist also 433,94 m vom Turm entfernt.